3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.
Γενική μορφή εξίσωσης 1^{ου} βαθμού : αx + β = 0

2.
Λύσεις της εξίσωσης αx + β = 0

- Όταν $\alpha \neq 0$, η εξίσωση γίνεται $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

  Η εξίσωση λοιπόν έχει μοναδική ρίζα την $-\frac{\beta}{\alpha}$
- Όταν $\alpha = 0$, η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = -\beta$

  α) αν μεν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

  β) αν δε $\beta = 0$, τότε η εξίσωση είναι ταυτότητα

* Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, όταν $\alpha \neq 0$ δεν έχει σημασία τι είναι ο β.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.
Λύση ή ρίζα εξίσωσης λέγεται κάθε αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση.
Π.χ Ο αριθμός 5 είναι ρίζα της εξίσωσης $2x = 10$
αφού $2 \cdot 5 = 10$

2.
Μια διευκρίνιση
Μη μπερδεύουμε τη ρίζα εξίσωσης με το σύμβολο $\sqrt{\ }$ που διαβάζεται «τετραγωνική ρίζα»

3.
Αδύνατη εξίσωση λέγεται η εξίσωση που δεν έχει ρίζες.
Π.χ $0\,x = 6$

4.
Αόριστη εξίσωση ή ταυτότητα λέγεται η εξίσωση που έχει άπειρες ρίζες.
Π.χ $0\,x = 0$

5.

Παραμετρική εξίσωση λέγεται η εξίσωση, η οποία εμπεριέχει μεταβλητό αριθμό λ (παράμετρος)

6.

Περιορισμοί

Όταν υπάρχουν παρανομαστές, υποχρεώνουμε το Ε.Κ.Π τους $\neq 0$

7.

Για να λύσουμε πρωτοβάθμια εξίσωση

α) απαλοιφή παρανομαστών

β) πράξεις

γ) χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

δ) αναγωγή ομοίων όρων

ε) κοινός παράγοντας ο άγνωστος

Έτσι φθάνουμε σε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ ή ($\alpha x = -\beta$)

Είμαστε έτοιμοι να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το α, για να βρούμε τον άγνωστο.

Αν όμως ο α είναι 0 δε μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο.

Έτσι ακολουθεί η λεγόμενη διερεύνηση, δηλαδή διακρίνουμε περιπτώσεις

i) όταν $\alpha = 0$ και ii) όταν $\alpha \neq 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να γραφούν δύο εξισώσεις **i)** με μοναδική λύση
ii) αδύνατες
iii) αόριστες
iv) παραμετρικές

Απάντηση

i) $6x = 12$, $\quad -2x = 5$
ii) $0x = -2$, $\quad x = 3 + x$
iii) $0x = 0$, $\quad 2x + 1 = 2x + 1$
iv) $\lambda x - 4 = \lambda^2 x$, $\quad (\mu + 1)x = \mu - 2$

2.

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $5x = \lambda - 3$ έχει μοναδική λύση;
Απάντηση

Επειδή $\alpha = 5 \neq 0$, η εξίσωση $5x = \lambda - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\lambda-3}{5}$.

Επομένως, η εξίσωση έχει μοναδική λύση για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$, την $\dfrac{\lambda-3}{5}$

3.

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\lambda - 3)x = 5$ έχει μοναδική λύση;
Απάντηση
Πρέπει να είναι $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow$
$\lambda - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\lambda \neq 3$

4.

Να λύσετε την εξίσωση $(\lambda - 3)x = 5$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Προτεινόμενη λύση

- Όταν $\lambda - 3 = 0$, δηλαδή $\lambda = 3$, η εξίσωση $\Leftrightarrow$ $0 \cdot x = 5$ αδύνατη

- Όταν $\lambda - 3 \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq 3$, η εξίσωση $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{5}{\lambda-3}$ μοναδική λύση

5.

Να λύσετε την εξίσωση $(\lambda - 3)x = 2\lambda - 6$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $\lambda - 3 = 0$, δηλαδή $\lambda = 3$, η εξίσωση $\Leftrightarrow$ $(3 - 3)x = 2 \cdot 3 - 6$

  $0 \cdot x = 0$ ταυτότητα

- **Όταν** $\lambda - 3 \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq 3$, η εξίσωση $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{2\lambda - 6}{\lambda - 3}$

  $x = \dfrac{2(\lambda - 3)}{\lambda - 3}$

  $x = 2$ μοναδική λύση

6.

Να εξετάσετε αν η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x = 2\mu - 2$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$, είναι αδύνατη, αόριστη ή έχει μοναδική λύση.

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση $\Leftrightarrow$ $(\mu - 1)(\mu + 1)x = 2(\mu - 1)$ **(1)**

- Όταν $(\mu - 1)(\mu + 1) = 0$

  $\mu - 1 = 0$ ή $\mu + 1 = 0$

  $\mu = 1$ ή $\mu = -1$

  α) Για $\mu = 1$, η (1) $\Leftrightarrow$ $(1 - 1)(1 + 1)x = 2(1 - 1)$

  $0 \cdot x = 0$ ταυτότητα

  β) Για $\mu = -1$, η (1) $\Leftrightarrow$ $(-1 - 1)(-1 + 1)x = 2(-1 - 1)$

  $-2 \cdot 0 \cdot x = 2(-2)$

  $0x = -4$ αδύνατη

- Όταν $(\mu - 1)(\mu + 1) \neq 0$

  $\mu - 1 \neq 0$ και $\mu + 1 \neq 0$

  $\mu \neq 1$ και $\mu \neq -1$, η (1) $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{2(\mu - 1)}{(\mu - 1)(\mu + 1)}$

  $x = \dfrac{2}{\mu + 1}$ μοναδική λύση

7.

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ να λύσετε την εξίσωση

$$\mu x = 3\mu - \frac{x}{2} + 1$$

Προτεινόμενη λύση

$$\mu x = 3\mu - \frac{x}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mu x = 6\mu - x + 2$$

$$2\mu x + x = 6\mu + 2$$

$$(2\mu + 1)x = 6\mu + 2 \qquad \textbf{(1)}$$

- Όταν $2\mu + 1 = 0$, δηλαδή όταν $2\mu = -1$

  $$\mu = -\frac{1}{2}$$

  η (1) $\Leftrightarrow$ $0\cdot x = -3 + 2$ $\Leftrightarrow$ $0\cdot x = -1$ αδύνατη

- Όταν $2\mu + 1 \neq 0$, δηλαδή όταν $2\mu \neq -1$

  $$\mu \neq -\frac{1}{2}$$

  η (1) $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{6\mu+2}{2\mu+1}$ μοναδική λύση

8.

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\mu \neq 0$ να λύσετε την εξίσωση

$$x - \mu = \frac{x}{\mu} - \frac{1}{\mu}$$

Προτεινόμενη λύση

$$x - \mu = \frac{x}{\mu} - \frac{1}{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \mu x - \mu^2 = x - 1$$

$$\mu x - x = \mu^2 - 1$$

$$(\mu - 1)x = \mu^2 - 1 \qquad \textbf{(1)}$$

- Όταν $\mu - 1 = 0$, δηλαδή όταν $\mu = 1$

  η (1) $\Leftrightarrow$ $0\cdot x = 0$ ταυτότητα

- Όταν $\mu - 1 \neq 0$, δηλαδή όταν $\mu \neq 1$

  η (1) $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{\mu^2-1}{\mu-1} = \dfrac{(\mu-1)(\mu+1)}{\mu-1} = \mu + 1$ μοναδική λύση

9.
Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\mu \neq 0$ να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\mu+x}{2} - \frac{1}{\mu} = \mu x + 2$$

Προτεινόμενη λύση

$$\frac{\mu+x}{2} - \frac{1}{\mu} = \mu x + 2 \Leftrightarrow \mu^2 + \mu x - 2 = 2\mu^2 x + 4\mu$$

$$\mu x - 2\mu^2 x = -\mu^2 + 4\mu + 2$$

$$\mu(1-2\mu)x = -\mu^2 + 4\mu + 2 \qquad \textbf{(1)}$$

- Όταν $\mu(1-2\mu) = 0$, δηλαδή όταν $\mu = 0$ ή $1 - 2\mu = 0$

  $\mu = 0$ ή $2\mu = 1$

  $\mu = 0$ ή $\mu = \frac{1}{2}$

  α) για $\mu = 0$ η (1) $\Leftrightarrow$ $0x = 2$ αδύνατη

  β) για $\mu = \frac{1}{2}$ η (1) $\Leftrightarrow$ $0x = -\frac{1}{4} + 4 = \frac{15}{4}$ αδύνατη

- Όταν $\mu(1-2\mu) \neq 0$, δηλαδή όταν $\mu \neq 0$ και $1 - 2\mu \neq 0$

  $\mu \neq 0$ και $2\mu \neq 1$

  $\mu \neq 0$ και $\mu \neq \frac{1}{2}$

η (1) $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{-\mu^2 + 4\mu + 2}{\mu(1-2\mu)}$ μοναδική λύση

10.

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ να λύσετε την εξίσωση

$$2\mu^2 x - 5\mu = 2(\mu^2 + 1) - 4\mu x$$

Προτεινόμενη λύση

$$2\mu^2 x - 5\mu = 2(\mu^2 + 1) - 4\mu x \iff 2\mu^2 x - 5\mu = 2\mu^2 + 2 - 4\mu x$$

$$2\mu^2 x + 4\mu x = 2\mu^2 + 5\mu + 2$$

$$2\mu(\mu + 2)x = 2\mu^2 + 5\mu + 2 \qquad \textbf{(1)}$$

- Όταν $2\mu(\mu + 2) = 0$, δηλαδή όταν $\mu = 0$ ή $\mu + 2 = 0$

  $\mu = 0$ ή $\mu = -2$

  α) για $\mu = 0$ η (1) $\iff$ $0x = 2$ αδύνατη

  β) για $\mu = -2$ η (1) $\iff$ $0x = 8 - 10 + 2$

  $0x = 0$ αόριστη

- Όταν $2\mu(\mu + 2) \neq 0$, δηλαδή όταν $\mu \neq 0$ και $\mu + 2 \neq 0$

  $\mu \neq 0$ και $\mu \neq -2$

  η (1) $\iff$ $x = \dfrac{2\mu^2 + 5\mu + 2}{2\mu(\mu + 2)}$ μοναδική λύση

11.

Να λύσετε την εξίσωση $|x - 4| = -1$

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού το πρώτο μέλος είναι ≥ 0 και το δεύτερο < 0 άρα δε μπορεί να είναι ίσα.

12.

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{6 - x} = -1$

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού το πρώτο μέλος είναι ≥ 0 και το δεύτερο < 0 άρα δε μπορεί να είναι ίσα.

13.

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{6-x} = 1$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $6 - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 6$

$$\sqrt{6-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{6-x}\right)^2 = 1^2$$

$6 - x = 1$

$x = 5$ δεκτή αφού ικανοποιεί τον περιορισμό

14.

Να λύσετε την εξίσωση $|x-4| = 3x - 6$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : Επειδή $|x-4| \geq 0$, πρέπει και $3x - 6 \geq 0$

$3x \geq 6$

$x \geq 2$

$|x-4| = 3x - 6 \;\Leftrightarrow\; x - 4 = 3x - 6$ ή $x - 4 = -(3x - 6)$

$-2x = -2$ ή $x - 4 = -3x + 6$

$x = 1$ ή $4x = 10$

$x = 1$ ή $x = \dfrac{5}{2}$

$x = \dfrac{5}{2}$

Η $x = 1$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.